Devoir à la maison

Convergence de la statistique

**Exercice1**

Une urne contient des boules numérotées de 1 à d. la proportion des boules de numéro est , avec

On note le vecteur de composantes On tire boules avec remise. Soient le numéro tiré au n-iéme tirage . le vecteur aléatoire de composantes Soit

Le nombre de boules de numéro tirées en tirages et le vecteur aléatoire de de composantes

1. Vérifier que , (ce qui implique que :
2. vérifier que l’espérance du vecteur est et que sa matrice de variance covariance est

où C’est-à-dire

1. Soit utiliser le théorème de la limite centrale vectorielle pour vérifier que :
2. Soit

Nous voulons montrer que pour cela soit le vecteur aléatoire de composantes Soit

1. Vérifier que avec
2. Soit

-Vérifier que

-Vérifier que , .

5. soit

a) vérifier que

où

1. Vérifier que et utiliser 3. 4a) pour montrer que en déduisant que :

soit .

1. Soit matrice orthogonale réelle dont la dernière ligne est

-donner la loi du vecteur aléatoire

-comparer en déduire que qui est le résultat cherché.

On a démontré ainsi le théorème suivant :

Théorème : Soit un échantillon d’une loi P à valeurs dans

Posons Alors :

**Exercice2**

Définition : Soient deux lois à valeurs dans Posons et .

La quantité est appelée distance de

On considère deux -échantillons des lois de deux variables aléatoires à valeurs dans respectivement.

La loi empirique du couple est donnée par :

. On veut tester l’indépendance de .

Si elles sont indépendantes. la loi du couple est le produit des lois marginales.

Donc contre avec

Sous la loi empirique s’écrit .

Utiliser le théorème ci -dessus pour montrer que :

converge vers sous et .

Déduire de ce résultat le test d’indépendance de qui est le suivant :

On rejette si quantile d’ordre

**Exercice3**

Un utilisant le tableaux contingence :

1. Vérifier que
2. En déduire que et en déduire le résultat du cours.